

## Φροντιστήριο 10 – Λύσεις

### Άσκηση 1

Υποθέστε ότι η γλώσσα  $A$  μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα  $B$ . Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες όχι;

(α) Κάποιος διαγνώστης για τη γλώσσα  $A$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάγνωση της γλώσσας  $B$ .

(β) Αν η  $A$  είναι διαγνώσιμη τότε και η  $B$  είναι διαγνώσιμη.

(γ) Αν η  $A$  είναι μη διαγνώσιμη τότε και η  $B$  είναι μη διαγνώσιμη.

### Λύση

(α) Λάθος. Αν η γλώσσα  $A$  μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα  $B$  τότε, εξ'ορισμού, ένας διαγνώστης για τη γλώσσα  $B$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διάγνωση της γλώσσας  $A$ . Το αντίθετό όμως δεν ισχύει απαραίτητα.

(β) Λάθος. Αν η γλώσσα  $A$  μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα  $B$  τότε αν η  $B$  είναι διαγνώσιμη και η  $A$  είναι διαγνώσιμη. Το αντίθετο όμως δεν ισχύει απαραίτητα.

(γ) Ορθό. Έστω  $A$  μια μη διαγνώσιμη γλώσσα. Ας υποθέσουμε, για να φθάσουμε σε αντίφαση, ότι η γλώσσα  $B$  είναι διαγνώσιμη. Τότε υπάρχει διαγνώστης για τη γλώσσα  $B$ . Επιπλέον, αφού η  $A$  μπορεί να αναχθεί στη  $B$ , ο διαγνώστης της γλώσσας  $B$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάγνωση της γλώσσας  $A$ . Συνεπώς η γλώσσα  $A$  είναι διαγνώσιμη. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση. Επομένως, αν η  $A$  είναι μη διαγνώσιμη τότε και η  $B$  είναι μη διαγνώσιμη.

### Άσκηση 2

Θεωρήστε το πρόβλημα της διάγνωσης κατά πόσο μια  $TM$   $M$  αποδέχεται τη λέξη  $0010$ .

(α) Να μορφοποιήσετε το πρόβλημα ως μια γλώσσα με το όνομα  $L_{0010}$ .

(β) Να αποδείξετε ότι η γλώσσα είναι μη διαγνώσιμη με αναγωγή από τη γλώσσα  $A_{TM}$ .

### Λύση

(α)  $L_{0010} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ αποδέχεται τη λέξη } 0010 \}$

(β) Για να λύσουμε την άσκηση αυτή θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την  $A_{TM}$ , στην υπό μελέτη γλώσσα  $L_{0010}$ .

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα  $L_{0010}$  είναι διαγνώσιμη και η  $TM$   $R$  είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη  $R$  θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη  $S$  για το πρόβλημα  $A_{TM}$ . Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η  $L_{0010}$  είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης  $S$  έχει ως εξής:

$S = \text{“Με είσοδο } \langle M, w \rangle$

1. Φτιάξε τη  $TM$   $M'$  η οποία με είσοδο  $x$ :

(α) Αν  $x = 0010$  η  $S$  τρέχει το  $M$  με είσοδο  $w$ . Αν η  $M$  αποδεχτεί το  $w$  τότε και η  $M'$  αποδέχεται το  $x$  και τερματίζει.

(β) Αν  $x \neq 0010$  η  $M'$  απορρίπτει.

2. Τρέξε την R με είσοδο  $\langle M' \rangle$ .
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή  $M'$  αποδέχεται τη λέξη 0010 αν και μόνο αν η μηχανή  $M$  αποδέχεται τη λέξη  $w$ . Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή  $M'$  ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή  $M'$  αποδέχεται τη λέξη 0010 ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μηχανή  $M$  αποδέχεται τη λέξη  $w$ .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

### Άσκηση 3

**Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα δεν είναι διαγνώσιμη.**

**$KENH = \{ \langle M \rangle \mid \eta \ M \ \epsilon\iota\sigma\iota\ \mu\iota\alpha \ \mu\eta\chi\alpha\eta\acute{\eta} \ \text{Turing} \ \eta \ \mu\epsilon \ \mu\epsilon \ \epsilon\iota\sigma\iota\delta\omicron \ \tau\epsilon\rho\mu\alpha\tau\iota\zeta\epsilon\iota \ \kappa\alpha\iota, \ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha} \ \tau\omicron\upsilon \ \tau\epsilon\rho\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\acute{o} \ \tau\eta\varsigma, \ \acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota \ \kappa\epsilon\upsilon\eta \ \tau\alpha\iota\iota\alpha \}$**

### Λύση

Για να λύσουμε την άσκηση αυτή θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την  $A_{TM}$  στην υπό μελέτη γλώσσα  $KENH$ .

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα  $KENH$  είναι διαγνώσιμη και η  $TM$  R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα  $A_{TM}$ . Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η  $KENH$  είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

$S = \text{“Με είσοδο } \langle M, w \rangle$

1. Φτιάξε τη  $TM$   $M'$  η οποία με είσοδο  $x$ :  
Τρέξε την  $M$  με είσοδο  $w$ . Αν η  $M$  αποδεχτεί το  $w$  τότε άδειασε την ταινία και αποδέξου.
2. Τρέξε την R με είσοδο  $\langle M' \rangle$ .
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή  $M'$  τερματίζει σε κάθε είσοδο και κατά τον τερματισμό της έχει κενή ταινία αν και μόνο αν η μηχανή  $M$  αποδέχεται τη λέξη  $w$ . Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή  $M'$  ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή  $M$  αποδέχεται τη λέξη  $w$ .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.