Σειρά Προβλημάτων 1 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να δώσετε κανονικές εκφράσεις που να περιγράφουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(α) {$a^m b^n$ |m, n $\in \mathbb{N}$, m+n περιττός ακέραιος}

(β) {w $\in$ {*a*,*b*}* | τα πρώτα δύο σύμβολα της w, αν υπάρχουν, *δεν* είναι τα ίδια με τα δύο τελευταία σύμβολα της w}

[Επεξήγηση: Αν η λέξη ξεκινά με την υποσυμβολοσειρά *xy* τότε δεν μπορεί να τελειώνει σε *xy*.]

(γ) { w | η w είναι μια μη κενή λέξη επί του αλφάβητου {a,b} η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα a σε κάθε πεντάδα συνεχόμενων στοιχείων μετά από το πρώτο a, αν υπάρχει}

(δ) {w| η w είναι λέξη επί του αλφάβητου {a,b} η οποία περιέχει τη συμβολοσειρά aba για άρτιο αριθμό φορών και δεν περιέχει τη συμβολοσειρά abb}

Λύση

(α) (aa)*(bb)*b $\cup$ (aa)*a (bb)*

(β) [aa (b $\cup$ a)*(ab$\cup$ba$\cup$bb)] $\cup$ [ab (b $\cup$ a)*(aa$\cup$ba$\cup$bb)]
$\cup$ [ba (b $\cup$ a)*(aa$\cup$ab$\cup$bb)] $\cup$ [bb (b $\cup$ a)*(aa$\cup$ba$\cup$ab)]
$\cup$ aba $\cup$ abb $\cup$ bab $\cup$ bba $\cup$ a $\cup$ b $\cup$ ε

(γ) b*[aa*(ε $\cup$ b $\cup$ bb $\cup$ bbb $\cup$ bbbb)]*

(δ) b*($a^+ b a^+ b a^+$)*[ε $\cup$ b]

Άσκηση 2

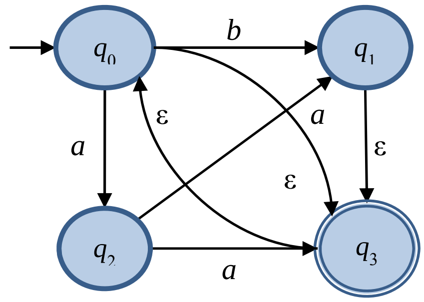
Θεωρήστε το μη ντετερμινιστικό αυτόματο (Q, Σ, δ, q_0, F) με

- **σύνολο καταστάσεων το $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,**
- **αλφάβητο το Σ = {*a*,*b*},**
- **σύνολο τελικών καταστάσεων το $F = \{q_3\}$, και**
- **συνάρτηση μεταβάσεων δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:**

δ	*a*	*b*	ε
q_0	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_1,q_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_0\}$

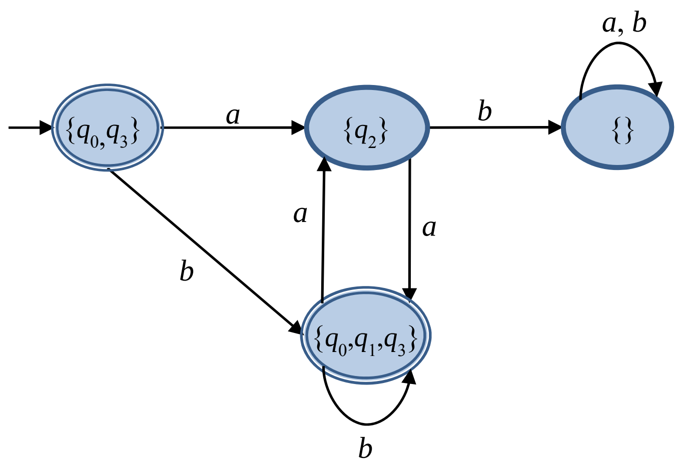
(α) Να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω ενός διαγράμματος μεταβάσεων.

Το διάγραμμα μεταβάσεων του αυτομάτου φαίνεται πιο κάτω:



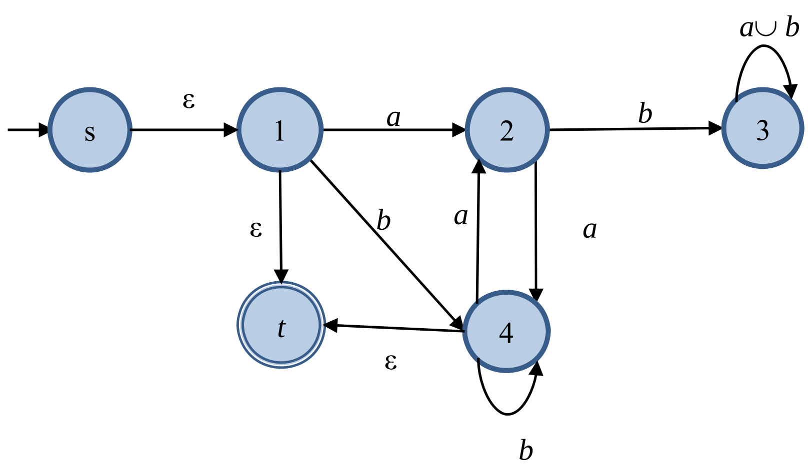
(β) Να μετατρέψετε το αυτόματο από το σκέλος (α) σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνειες 2-37 – 2-38).

Από τη σχετική κατασκευή προκύπτει το πιο κάτω ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο.

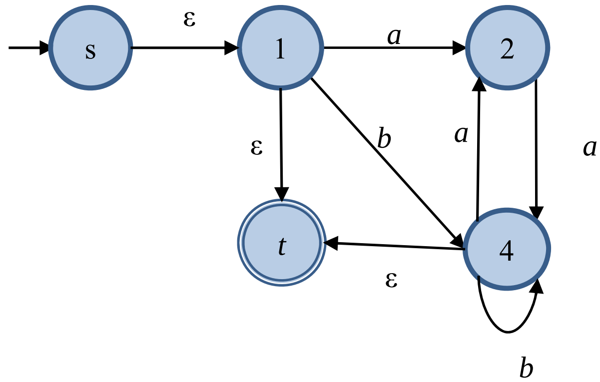


(γ) Να μετατρέψετε το αυτόματο από το μέρος (β) στην ισοδύναμη κανονική έκφραση χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνεια 3-20).

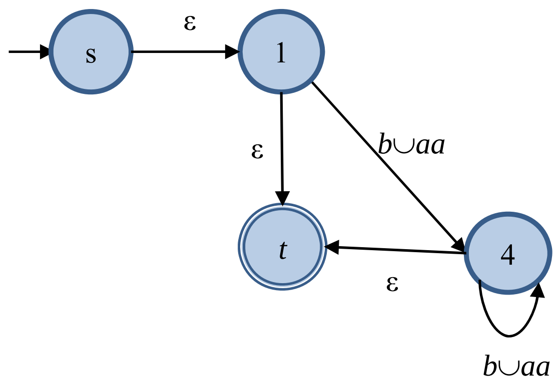
Εισάγουμε καινούρια αρχική κατάσταση και καινούρια τελική κατάσταση δημιουργώντας τις κατάλληλες συνδέσεις και μετατρέποντας το αυτόματο σε GNFA. Για ευκολία, μετονομάζουμε τις υπόλοιπες καταστάσεις.



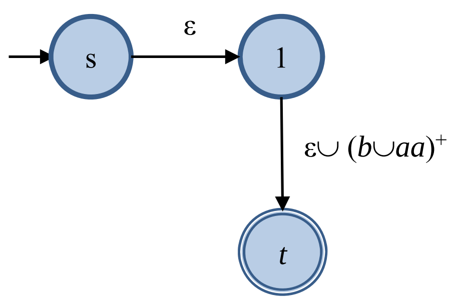
<u>Βήμα 1: Αφαίρεση της κορυφής 3</u>



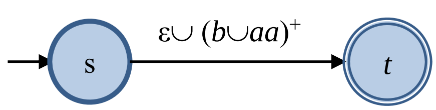
<u>Βήμα 2: Αφαίρεση της κορυφής 2</u>



<u>Βήμα 3: Αφαίρεση της κορυφής 4</u>



<u>Βήμα 4: Αφαίρεση της κορυφής 1</u>



<u>Άσκηση 3</u>

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γλώσσες είναι κανονικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) { x#y | x$\in$\{0,1\}^{2}, y $\in$\{0,1\}* και η λέξη x είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης y }

(β) { x#y | x, y $\in$\{0,1\}* και η λέξη x είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης y }

(γ) { x#y | x, y $\in$\{0,1\}* και η λέξη y είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης x }

(δ) { w | w $\in$\{0,1\}* και η w έχει περιττό μήκος και το μεσαίο της σύμβολο είναι 0 }

(ε) $\left\{ a^{4n^2+9} \middle| n \geq 0 \right\}$

(α) Η γλώσσα είναι κανονική και περιγράφεται από την πιο κάτω κανονική έκφραση:

$00\#(0 \cup 1)^*00\,(0 \cup 1)^* \cup 01\#(0 \cup 1)^*01\,(0 \cup 1)^*$
$\cup\, 10\#(0 \cup 1)^*10\,(0 \cup 1)^* \cup 11\#(0 \cup 1)^*11\,(0 \cup 1)^*$

(β) Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η

L_2 = { x#y | x, y $\in$\{0,1\}* και η λέξη x είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης y }

είναι κανονική.

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w=1^p\#1^p$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, w = *xyz* έτσι ώστε η υπολέξη *xy* να βρίσκεται μέσα στις *p* πρώτες θέσεις της *w* ($|xy| \leq p$) η *y* να είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και επανάληψη της υπολέξης *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_2$).

Αφού $|xy| \leq p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $x = 1^\lambda$, $y = 1^\mu$, $z = 1^{p-\lambda-\mu}\#1^p$. Επίσης, από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^2z \in L_3$. Αλλά $xy^2z = 1^\lambda 1^\mu 1^\mu 1^{p-\lambda-\mu}\#1^p=1^{p+\mu}\#1^p$. Από τον ορισμό της γλώσσας, $xy^2z \notin L_2$.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_3 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

(γ) Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η

L_3 = { x#y | x, y $\in$\{0,1\}* και η λέξη y είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης x }

είναι κανονική.

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = 1^p\#1^p$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, *w* = *xyz* έτσι ώστε η υπολέξη *xy* να βρίσκεται μέσα στις *p* πρώτες θέσεις της *w* ($|xy| \leq p$), η *y* να είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και οποιαδήποτε επανάληψη της υπολέξης *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_3$).

Αφού $|xy| \leq p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $x = 1^\lambda$, $y = 1^\mu$, $z = 1^{p-\lambda-\mu}\#1^p$. Επίσης, από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^0z \in L_3$. Αλλά $xy^0z = 1^\lambda 1^{p-\lambda-\mu}\#1^p=1^{p-\mu}\#1^p$. Από τον ορισμό της γλώσσας, και αφού η λέξη 1^p δεν είναι υποσυμβολοσειρά της λέξης $1^{p-\mu}$, $xy^0z \notin L_3$.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_3 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

(δ) Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η

L_4 = { w | w $\in$\{0,1\}* και η w έχει περιττό μήκος και το μεσαίο της σύμβολο είναι 0 }

είναι κανονική.

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = 1^p01^p$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = xyz$ έτσι ώστε η υπολέξη *xy* να βρίσκεται μέσα στις *p* πρώτες θέσεις της *w* ($|xy| \le p$) η *y* να είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και οποιαδήποτε επανάληψη της υπολέξης *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_4$).

Αφού $|xy| \le p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $x = 1^\lambda$, $y = 1^\mu$, $z = 1^{p-\lambda-\mu}01^p$. Επίσης, από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^2z \in L_4$. Αλλά $xy^2z = 1^\lambda 1^{2\mu} 1^{p-\lambda-\mu}01^p = 1^{p+\mu}01^p$. Από τον ορισμό της γλώσσας, αφού το μεσαίο της σύμβολο δεν είναι 0, $xy^2z \notin L_4$.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_4 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

(ε) Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η $L_5 = \{ a^{4n^2+9} \mid n \ge 0 \}$ είναι κανονική.

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = a^{4p^2+9}$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = xyz$ έτσι ώστε η υπολέξη *xy* να βρίσκεται μέσα στις *p* πρώτες θέσεις της *w* ($|xy| \le p$) η *y* να είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και οποιαδήποτε επανάληψη της υπολέξης *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_5$).
Αφού $|xy| \le p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $x = a^\lambda$, $y = a^\mu$, $z = a^{4p^2+9-\lambda-\mu}$ και $\lambda+\mu \le p$.

Επίσης, από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^2z \in L_5$.

Έχουμε ότι $xy^2z = a^{4p^2+9+\mu}$.

Για να ανήκει η λέξη στη γλώσσα πρέπει $4p^2 + 9 + \mu = 4q^2 + 9$ για κάποιο ακέραιο q. Αλλά

$4p^2 + 9 + \mu > 4p^2 + 9$ και

$4p^2 + 9 + \mu < 4(p + 1)^2 + 9 = 4p^2 + 8p + 13$ για τον λόγο ότι $\mu \le p$.

Αφού η ποσότητα $4p^2 + 9 + \mu$ βρίσκεται ανάμεσα στις δύο τιμές, και δεν ισούται με καμιά από αυτές, είναι αδύνατο να υπάρχει q τέτοιο ώστε $4p^2 + 9 + \mu = 4q^2 + 9$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $xy^2z \notin L_5$ και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_5 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

<u>Άσκηση 4</u>

Η Βίκυ και ο Μίκης έχουν βρει στην αποθήκη ένα παλιό NFA του παππού τους. Όμως είναι τόσο σκουριασμένο και περίπλοκο που δεν μπορούν να καταλάβουν ποια γλώσσα αποδέχεται. Παρόλα αυτά, ο Μίκης έχει αρκετές ιδέες πώς να το τροποποιήσει για να εκτελεί άλλες εργασίες:

Μίκης: Μπορώ εύκολα να το τροποποιήσω ώστε να αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της γλώσσας που αναγνωρίζει τώρα! Αρκεί να ανταλλάξω τελικές και μη τελικές καταστάσεις: Όσες ήταν τελικές να τις κάνω μη τελικές και όσες ήταν μη τελικές να τις κάνω τελικές.

Βίκυ: Χμμμ…

Μίκης: Εξίσου εύκολα μπορώ να το τροποποιήσω ώστε να αναγνωρίζει τη σώρευση της γλώσσας που αναγνωρίζει τώρα! Αρκεί σε κάθε τελική κατάσταση να προσθέσω μια ε-μετάβαση προς την αρχική και μετά να συμπεριλάβω την αρχική στις τελικές.

Βίκυ: Χμμμ…

Αν και η Βίκυ είναι απλά δύσπιστη, εσείς είστε σίγουροι ότι καμιά από τις δύο τροποποιήσεις του Μίκη δεν λειτουργεί. Εξηγήστε γιατί:

(α) Δώστε αντιπαράδειγμα NFA N για το οποίο το αυτόματο N΄ που παράγει η πρώτη τροποποίηση δεν αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της L(N). Αποδείξτε ότι το N είναι πράγματι αντιπαράδειγμα. Πως θα κατασκευάζατε εσείς ένα αυτόματο για το συμπλήρωμα της L(N);

(β) Δώστε αντιπαράδειγμα NFA M για το οποίο το αυτόματο M΄ που παράγει η δεύτερη τροποποίηση δεν αναγνωρίζει τη σώρευση της L(M). Αποδείξτε ότι το M είναι πράγματι αντιπαράδειγμα.

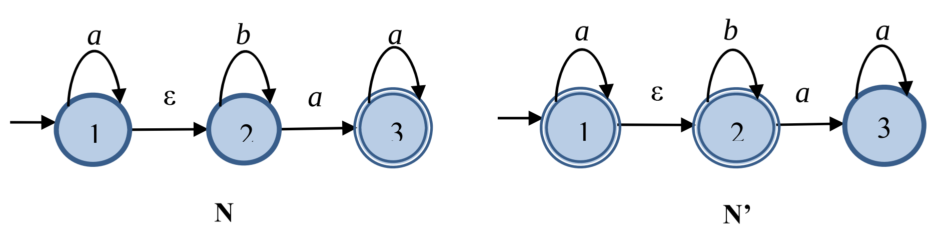
<u>Λύση</u>

(α) Παρατηρούμε ότι το αυτόματο του Μίκη δεν αλλάζει τις μεταβάσεις και επομένως δεν επηρεάζει τον υπολογισμό: το αυτόματο N′ θα επεξεργαστεί κάθε λέξη με την ίδια ακολουθία μεταβάσεων όπως και το N. Η μόνη διαφορά έγκειται στην τελική απόφαση. Αν σε κάποιο κλάδο της μη ντετερμινιστικής εκτέλεσης του αυτομάτου τα N αποδέχεται τότε το N′ θα απορρίψει.

Σημαίνει όμως αυτό ότι αν το N αποδέχεται κάποια λέξη το N′ θα την απορρίψει;

Μπορούμε να δούμε πως όχι: Παρατηρούμε ότι αν το N αποδέχεται κάποια λέξη τότε είναι δυνατό κάποιοι κλάδοι της μη ντετερμινιστικής εκτέλεσης του N να αποδέχονται και κάποιοι άλλοι να απορρίπτουν. Τότε το αυτόματο N΄ θα απορρίπτει στους αποδεκτικούς κλάδους του N και θα αποδέχεται στους απορριπτικούς. Κατά συνέπεια το N′ θα αποδέχεται και λέξεις που αποδέχεται το N και επομένως η γλώσσα του N′ δεν θα αποτελεί το συμπλήρωμα της γλώσσας του N.

Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο πιο κάτω αυτόματο.



Το αυτόματο N αποδέχεται τη λέξη a (μονοπάτι 1→2→3) και το αυτόματο N′ επίσης την αποδέχεται (στο μη αποδεκτικό μονοπάτι του N, 1→1).

Εναλλακτικό αντιπαράδειγμα που παρουσιάζει ακόμα ένα πρόβλημα της κατασκευής του Μίκη είναι το πιο κάτω. Το αντιπαράδειγμα εντοπίζει ότι η κατασκευή του Μίκη δεν επιτρέπει την αποδοχή λέξεων που απορρίπτονται από το N λόγω μη ύπαρξης κλάδου που να τις διαβάζει. Για παράδειγμα στο πιο κάτω σχήμα, το N απορρίπτει τη λέξη 11 και επομένως το N′ θα έπρεπε να την αποδέχεται. Αυτό δεν ισχύει αφού το N′ αποδέχεται μόνο την κενή λέξη και όχι το συμπλήρωμα της γλώσσας που αποδέχεται το N, που είναι η γλώσσα {1}*- {1}.

Εντούτοις, η κλάση των γλωσσών που αναγνωρίζονται από NFA είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε γλώσσα Λ που αναγνωρίζεται από κάποιο NFA N, τότε το συμπλήρωμά της επίσης αναγνωρίζεται από κάποιο NFA. Για να εντοπίσουμε αυτό το αυτόματο μπορούμε να μετατρέψουμε το N σε ισοδύναμο DFA, έστω D, και να εφαρμόσουμε σε αυτό την κατασκευή του Μίκη. Η κατασκευή, στα πλαίσια των ντετερμινιστικών αυτομάτων, είναι τέτοια ώστε το καινούριο αυτόματο να αναγνωρίζει τη γλώσσα $\bar{\Lambda}$.

Για να δείξουμε το ζητούμενο υποθέτουμε ότι N = (Q, Σ, δ, q, F) είναι ένα DFA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα L και N' = (Q, Σ, δ, q, F'), $F' = Q - F$.

Θα αποδείξουμε ότι

w $\in$ L(N') αν και μόνο αν w $\in \overline{L(N)}$. (*)

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $w = w_1w_2\ldots w_n \in$ L(N'). Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_n$ του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q$
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ για $i = 0,\ldots,n-1$, και
3. $r_n \in Q - F$

Επομένως, $w \in \overline{L(N)}$. Αυτό αποδεικνύει την κατεύθυνση $\Rightarrow$ της ζητούμενης πρόταση (*).

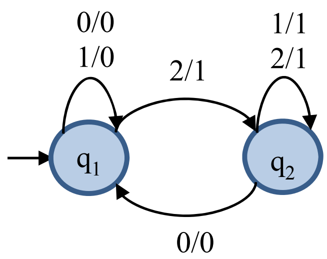
Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι w $\in \overline{L(N)}$. Αφού το N' είναι ένα ντετερμινιστικό αυτόματο, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_n$ του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q$
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ για $i = 0,\ldots,n-1$,
3. αλλά, αφού $w \in \overline{L(N)}$, $r_n \notin F$.

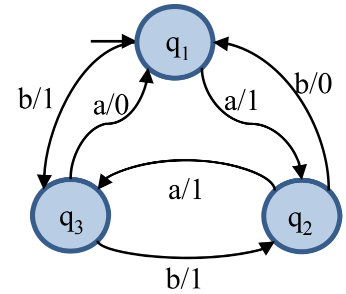
Παρατηρούμε ότι το ίδιο μονοπάτι εμφανίζεται και στο αυτόματο N'. Σε αυτή την περίπτωση, αφού $r_n \notin F$ έχουμε $r_n \in Q - F$, και, επομένως $w \in$ L(N'). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 5</u>

Ένας πεπερασμένος μεταγραφέας καταστάσεων (για συντομία ΠΜΚ) είναι ένα είδος αιτιοκρατικού αυτομάτου που παράγει ως έξοδο όχι απλώς *αποδοχή* ή *απόρριψη*, αλλά μια ολόκληρη λέξη. Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζονται τα διαγράμματα δύο πεπερασμένων μεταγραφέων καταστάσεων Π_1 και Π_2.



Π_1



Π_2

Κάθε μετάβαση ενός ΠΜΚ επιγράφεται με δύο σύμβολα, τα οποία χωρίζονται με μια κάθετο /: το πρώτο αντιπροσωπεύει το σύμβολο εισόδου για τη συγκεκριμένη μετάβαση και το δεύτερο το σύμβολο εξόδου. Για παράδειγμα, η μετάβαση από την q_1 στην q_2 στον μεταγραφέα Π_1 έχει ως σύμβολο εισόδου το 2 και ως σύμβολο εξόδου το 1. Ορισμένες μεταβάσεις είναι δυνατό να έχουν περισσότερα από ένα ζεύγη εισόδου-εξόδου, π.χ. η μετάβαση στο Π_1 από την q_1 στον εαυτό της. Όταν ένας ΠΜΚ υπολογίζει με είσοδο κάποια λέξη $w=w_1w_2\ldots w_n$, λαμβάνει τα σύμβολα εισόδου ένα προς ένα και, με αφετηρία την εναρκτήρια κατάσταση, ακολουθεί τις μεταβάσεων των οποίων τα σύμβολα εισόδου συμπίπτουν με τα σύμβολα της εισόδου. Επιπλέον, κάθε φορά που εκτελεί μια μετάβαση, ο μεταγραφέας παράγει στην έξοδο το αντίστοιχο σύμβολο εξόδου. Για παράδειγμα, με είσοδο 2212011, ο Π_1 διατρέχει την ακολουθία καταστάσεων q_1, q_2, q_2, q_2, q_2, q_1, q_1, q_1, και παράγει την έξοδο 1111000. Αντίστοιχα, με είσοδο abbb ο Π_2 παράγει την έξοδο 1011.

(α) Για κάθε ένα από τα παρακάτω σκέλη, παραθέστε την ακολουθία των καταστάσεων που διατρέχει ο αναφερόμενος μεταγραφέας και την έξοδο που παράγει.

(i) Π_1, με είσοδο 01001

(ii) Π_1, με είσοδο 02020022

(iii) Π_2, με είσοδο bbabbaa

(iv) Π_2, με είσοδο bbbbbaaa

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός ΠΜΚ με αλφάβητο εισόδου και εξόδου το {0,1} το οποίο για κάθε λέξη είσοδου επιστρέφει ως έξοδο τη λέξη η οποία συμπίπτει με τη λέξη εισόδου στις άρτιες θέσεις και διαφέρει στις περιττές. Για παράδειγμα, με είσοδο τη λέξη 0010010 ο μεταγραφέας παράγει την έξοδο 1000111.

<u>Λύση</u>

(α) Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό (q, w_1, w_2) για να δηλώσουμε τη ‘φάση’ όπου το αυτόματο βρίσκεται στην κατάσταση q, εκκρεμεί η ανάγνωση της λέξης w_1 ενώ στην έξοδο έχει μέχρι στιγμής εγγραφεί η λέξη w_2.

(i) Αρχικά βρισκόμαστε στη φάση (q_1, 01001, ε) και ο μεταγραφέας θα εκτελέσει τα πιο κάτω βήματα:

(q_1, 01001, ε) $\rightarrow$ (q_1, 1001, 0) $\rightarrow$ (q_1, 001, 00) $\rightarrow$ (q_1, 01, 000)
$\rightarrow$ (q_1, 1, 0000) $\rightarrow$ (q_1, ε, 00000)

(ii) Αρχικά βρισκόμαστε στη φάση (q_1, 02020022, ε) και ο μεταγραφέας θα εκτελέσει τα πιο κάτω βήματα:

(q_1, 02020022, ε) $\rightarrow$ (q_1, 2020022, 0) $\rightarrow$ (q_2, 020022, 01)
$\rightarrow$ (q_1, 20022, 010) $\rightarrow$ (q_2, 0022, 0101) $\rightarrow$ (q_1, 022, 01010)

$\rightarrow$ (q_1, 22, 010100) $\rightarrow$ (q_2, 2, 0101001) $\rightarrow$ (q_2, ε, 01010011)

(iii) Αρχικά βρισκόμαστε στη φάση (q_1, bbabbaa, ε) και ο μεταγραφέας θα εκτελέσει τα πιο κάτω βήματα:

(q_1, bbabbaa, ε) $\rightarrow$ (q_3, babbaa, 1) $\rightarrow$ (q_2, abbaa, 11) $\rightarrow$ (q_3, bbaa, 111)
$\rightarrow$ (q_2, baa, 1111) $\rightarrow$ (q_1, aa, 11110) $\rightarrow$ (q_2, a, 111101) $\rightarrow$ (q_3, ε, 1111011)

(iv) Αρχικά βρισκόμαστε στη φάση (q_1, bbbbbaaa, ε) και ο μεταγραφέας θα εκτελέσει τα πιο κάτω βήματα:

(q_1, bbbbbaaa, ε) $\rightarrow$ (q_3, bbbbaaa, 1) $\rightarrow$ (q_2, bbbaaa, 11) $\rightarrow$ (q_1, bbaaa, 110)
$\rightarrow$ (q_3, baaa, 1101) $\rightarrow$ (q_2, aaa, 11011) $\rightarrow$ (q_3, aa, 110111)
$\rightarrow$ (q_1, a, 1101110) $\rightarrow$ (q_2, a, 11011101)

(β) Ο πιο κάτω μεταγραφέας διαθέτει δύο καταστάσεις και σε κάθε μετάβαση μεταφέρεται από τη μία στην άλλη έτσι ώστε στις περιττές εμφανίσεις συμβόλων να μεταβάλλει το σύμβολο και στις άρτιες εμφανίσεις να το διατηρεί.